「わかる学力」を測る評価方法の研究
―解法アルゴリズムの可視化を通して―

中瀬　万葉（教育方法・学習科学コース）

高校数学において、従来の定期テストでは課題解決能力等の「わかる学力」を測ることができないと言われている。なぜなら、生徒の中には、特定の解法をパターン化している様子が見られ、定期テストはそのパターンを適応して解くことができるからである。しかし、特定の解法のパターン化は、数学教育においてアルゴリズム化と言われ重要視されてきた。筆算もその1つである。つまり、生徒が問題を解く際に用いるアルゴリズムの中には、教科書に載っているような素晴らしいものもあれば、「わかる学力」の向上を阻害するような否定すべきものもあると考えられる。そこで本稿では、正しい答えを求めることができる生徒は、「歴史的アルゴリズム」・「記号的アルゴリズム」・「構造的アルゴリズム」のいずれかを用いていると考えた。また、生徒がどのアルゴリズムを用いているのかを判断することで「わかる学力」を測る評価方法を示した。

1章　問題の所在と目的

1－1　数学教育の課題

高校数学において、従来の定期テストでは「できる学力」を測るばかりで、「わかる学力」は測れないと言われている。藤村・橘（2018）は、「できる学力」とは「特定の手続き的知識・スキルを適用して解くこと」（p.16）であり、一方「わかる学力」とは「諸事情に対する概念的理解の深まりやそれに関連する思考プロセスの表現、それらを通じた非定型問題（多様な解・解法・解釈などが可能な問題）の解決や探究」（p.16）であると述べている。従来の定期テストは、教科書や問題集で扱われている問題の数値を変えたものが出題されるため、特定の手続きを正確に実行する「できる学力」しか測ることはできない。日本の数学教育は、特定の解法の手続きをパターン化させることに特化しているようである。

課題解決能力などの「わかる学力」を測る方法がなければ、生徒の「わかる学力」に応じた適切な指導ができないため、「わかる学力」を客観的に正しく測る評価方法が必要である。そこで、Silver（1981）の述べる、問題解決能力の違いの特徴から「わかる学力」を測る方法を考える。

数学の問題解決能力の違いについて、Silver（1981）は、「数学的関連のある文章題」を分類する実験を行い、能力の高い生徒は数学の問題構造の類似性をもとに分類するのに対し、能力が低い生徒は問題の文脈から分類することを明らかにした。つまり、生徒が問題文脈から解法を考えているのか、問題構造を理解して解法を考えているのかを明らかにする必要がある。しかし、それは定期テストのような、問題文脈を見てパターン化した解法の手続きを当てはめることが可能である評価方法では明らかにできない。

そこで本稿では、正しい答えを求めることができる生徒は、「歴史的アルゴリズム」・「記号的アルゴリズム」・「構造的アルゴリズム」のいずれかを用いていると考えた。そして、生徒がどのアルゴリズムを用いているのかを判断することで「わかる学力」を測る評価方法を明らかにする。

1－2　アルゴリズムとは

思考の伴わない行動のパターン化は、数学においてアルゴリズム化と表現される。「アルゴリズム」と聞くと、コンピューター上のC言語やJava等を思い浮かべる人も多いが、それだけではない。数学教育の中にも、さらには実生活の中にも、様々なところにアルゴリズムは存在している。

『数学教育指導用語辞典』（2018）には、「アルゴリズムとは、その指示に忠実に従うかぎり、誰が実行しても同じ結果が得られ、しかも、無限に思考を繰り返すことなく、必ず同じ結果が得られる計算手順のことである」（p.5）と説明されている。加えて、アルゴリズムの重要性を、算数で学ぶ筆算を例に挙げ、「筆算は、数学の歴史の中で最初から存在したものではなく、長い年月をかけて人類が改良を重ねて生み出した『アルゴリズム』

であり、そうしたものを生み出す人間の数学的な思考が、今日の人工知能の動きや働きなどを支えている」（p.5）と述べている。提示されたアルゴリズムを実行する能力は、算数で鍛えられ、実生活でも役に立っていることから、アルゴリズムを肯定的にも捉えられることがわかる。

1－3　3つのアルゴリズム

筆者は、算数・数学に取り組む生徒は、以下の3 つのアルゴリズムを扱っているのではないかと考える。

1－3－1　歴史的アルゴリズム

1 つ目は、教員が提示する解法のアルゴリズムである。前節のアルゴリズムの例で挙げた、筆算はこれに当たる。このような、長い歴史の中で人類が生み出したアルゴリズムを､本稿では端的に､「歴史的アルゴリズム」と呼ぶこととし、以下のように定義する。

【歴史的アルゴリズム】
算数・数学において、歴史の中で人類が改良を重ね生み出した解法のアルゴリズム

歴史的アルゴリズムは、教科書に扱い方や概念が書かれており、算数・数学教育で多く扱われている。それを学ぶたびに先人の知恵の偉大さを思い知る。例えば、ユークリッドの互除法もそれにあたる。非常に大きな2数の最大公約数を簡単に求めることができるユークリッドの互除法をはじめ、歴史的アルゴリズムに驚き、感動した経験のある人も少なくないだろう。

歴史的アルゴリズムに焦点を当てた研究は、多く存在する。遠山・銀林（1992）は、歴史的アルゴリズムである筆算について､「量という概念が脱落してしまっている」（p.7）ような、ひたすらに繰り返す計算練習を否定し、計算練習の方法の 1 つである水道方式の有効性を述べている。

このように、歴史的アルゴリズムには必ず概念があり、その概念が抜け落ちないための研究がなされている。先程例に挙げたユークリッドの互除法も、教科書ではタイルを用いて正当性が示されている。このように、歴史的アルゴリズムは、概念を理解せず機械的に扱われることを防ぐことが求められている。

1－3－2　記号的アルゴリズム

2 つ目は、生徒が自ら生み出す、問題構造の理解が伴っていない解法のアルゴリズムである。これは、前項で述べた歴史的アルゴリズムとは異なり、教科書には書かれていない。しかし、問題構造を理解せずに解法をパターン化し、特定の問題で正しい答えを導くことも､「必ず正しい結果が得られる計算手順」であることから、アルゴリズムの１つであると考えられる。

記号的アルゴリズムを用いている例として、次のような生徒が挙げられる。授業ですぐ突っ伏してしまう高校2年生の数学嫌いの生徒に、同じ解き方の小問集合を与え、教員が最初の問題だけ解いてみせると、生徒は意欲的にその後の問題を解き始める。そして、正しい答えを導き出した時には、達成感を得ている様子が窺える。しかし、少し問題文が異なる問題になると、すぐやめてしまう。このような「できる学力」を向上させているアルゴリズムを、本稿では端的に､「記号的アルゴリズム」と呼ぶこととし､以下のように定義する。

【記号的アルゴリズム】
算数・数学において、内容に関わらず、問題文脈により行われる解法のアルゴリズム

記号的アルゴリズムは、難しい概念を理解せずに定期テスト等で点数を得られるという点で、非常に便利なものである。そのため、時折、記号的アルゴリズムを生徒が生み出すのではなく、教員から提示する場合がある。

教員から提示する記号的アルゴリズムの例として、図１の「みはじ」の図が挙げられる。眞渕・秋田（2013）は、この「みはじ」の図について「３つの式の中にある共通な関係を認識できず、それぞれ別の関係として捉えている場合がある。共通な関係が理解できるかどうかは、生徒の学習内容の理解に大きく影響する」（p.119）と述べ､「生徒が関係を理解せずに（中略）図を覚えていたとしても、正しい答えを出すことはできる」（p.119）といった課題を挙げている。つまり、

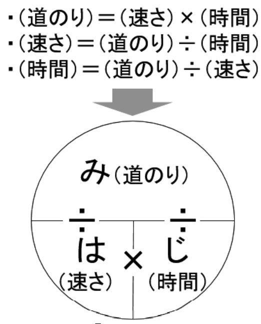

図１ 「みはじ」の図

生徒が学習において、解法の意味や性質を理解しているのか、解法だけを記憶して使っているのかは、問題の答えの正しさだけでは判断できないのである。

この場合「みはじ」の図は、「速さ」の問題を解く記号的アルゴリズムとなっており、この図を利用すれば、思考を伴わずに正しい答えを導くことができる。しかし、この便利な図は、歴史的アルゴリズムではない。概念が伴ったものではないからである。そのため、教科書には載っておらず、学習指導要領も推奨していない。児童が解法を理解せずとも解けてしまうことを危惧しているからではないだろうか。教科書に載っていないにも関わらず、日本では「みはじ」の図を用いた指導が広く行われている。「みはじ」の図のような簡単に解ける「裏技」や「覚え方」を提示してくれる教員を、児童・生徒は「分かりやすい先生」と評価する傾向にあるからだと考えられる。

このような、教員が提示する記号的アルゴリズムを否定的に捉えている研究は行われているが、生徒が生み出す記号的アルゴリズムについて行われている研究は、管見の限り知られていない。

1−3−3　構造的アルゴリズム

3 つ目は、生徒が自ら生み出す、学習内容の理解が伴うアルゴリズムである。記号的アルゴリズムと同様に、一般的にはアルゴリズムであると捉えられていないが、問題の構造や意味を理解したうえで、生徒が解法をパターンしたものは、一種のアルゴリズムであると考えられる。このようなアルゴリズムを、本稿では端的に、「構造的アルゴリズム」と呼ぶこととし、以下のように定義する。

【構造的アルゴリズム】 算数・数学において、問題の構造・意味を理解して行われる解法のアルゴリズム

構造的アルゴリズムと記号的アルゴリズムの違いは、岡本ら（2003）の述べる 2 つの熟達者を用いて、次のように説明できる。岡本ら (2003) は、「固定的熟達者は、決まった課題において手続きを正確に素早く実行できるに過ぎないのに対して、適応的熟達者は課題において手続きを実行できるだけでなく、その手続きの意味を理解しているので、新しい状況にもその手続きを修正して適応できるのだと考えられている」（p.108）と述べている。適応的熟達者は構造的アルゴリズムを用いており、固定的熟達者は記号的アルゴリズムを用いていると考えられる。

数学において求められるのは、構造的アルゴリズムを構成する適応的熟達者であることは明らかである。そのことから、抽象度が高く問題構造の理解が困難な単元では、構造的アルゴリズムを確立させようとして、ICT を用いたり、立体教具を用いたりする研究が行われている。

他にも、構造的アルゴリズムを応用させることを目的とした研究が多くなされており、その中には、それを一般化しスキーマとして捉えるものも見られる。その 1 つとして、吉井（1996）は「問題場面に依存しない抽象的・一般的知識を『問題解決スキーマ』」（p.101）として研究を行っている。このように、構造的アルゴリズムを広域に広げていく研究は多く存在する。

1−4　記号的アルゴリズムの問題点

3 つのアルゴリズムの中で、記号的アルゴリズムが高校数学の学習を妨げているのではないかと考える。記号的アルゴリズムは、唯一概念が伴っておらず、正の転移 [1] が不可能であるからである。

数学に限らず、教員は様々なところへ正の転移がなされることを目指し、授業を行っているのではないだろうか。しかし、記号的アルゴリズムは、正の転移が非常に難しい。文脈により判断された解法を実行する手続きだからである。それだけでなく、負の転移が見られる。記号的アルゴリズムを実行していく達成感等の感覚・知識が強固に働き、高校数学の習得を妨害しているのである。生徒は、記号的アルゴリズムを実行していく達成感に囚われることで、難しいと感じた問題は、無意識に記号的アルゴリズム化してしまうのである。

記号的アルゴリズム化してしまうことで、問題文脈が異なる問題は解くことができない。特に抽象度の高い高校数学では、問題文脈だけを見て問題構造の類似性を読み取ることは非常に難しい。そのため、高校数学では正の転移が可能な知識・技能を習得していかなければならないのである。本稿では以後、正の転移を単に「転移」と述べる。

一方で、記号的アルゴリズムを用いることを肯定的に捉える場合もある。思考を伴わずに正しい解答を導くことができ、定期テストでもある程度の点数を取ることができるからである。しかし、岡本（2001）は、教育における転移の重要性について、「教育ということを考えた時、私たちが子ども達に教えた知識や技能は、教えた当該の課題にだけ適応できるようになってほしいと願っているのではなくて、その知識や技能を他の学習課題にまで応用できるようになって欲しいと願っているはずであり、もっというならば、学校で教えたことを日常生活にまで応用できるようになってほしいと願っているはずである」(p.2) と述べている。教員は、児童・生徒が転移可能な知識や技能を習得することができるように努めていくべきである。

しかし、高校までの算数・数学教育が、記号的アルゴリズム化する能力を高めることに偏りすぎているのではないだろうか。教員は生徒にアルゴリズムを入力し、生徒はコンピューターのようにそれを実行する。そのような算数・数学の授業を受けてきた生徒は、記号的アルゴリズムが使えない問題の考え方が分からなくなってしまう。また、高校数学は抽象度が高いため、解法の意味を理解していない記号的アルゴリズムを用いると、そのアルゴリズムの適応範囲が非常に狭くなってしまう。問われていることは同じでも、問題文が変わると、抽象度の高い高校数学では、同じ問題として捉えられないのである。

このことから、高校数学の役割の 1 つが、「記号的アルゴリズムからの脱却」であると考えられる。「記号的アルゴリズムからの脱却」とは、生徒が構成する記号的アルゴリズムを、「アルゴリズム構成段階」(図 2) の次の段階へと進めることである。

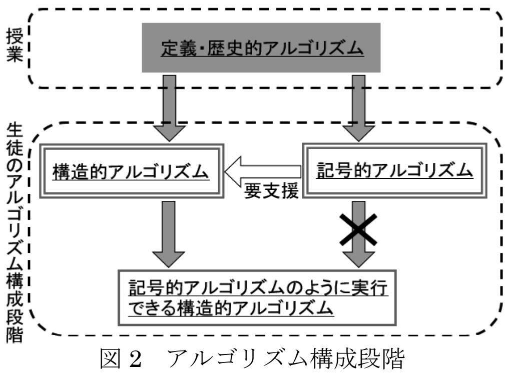

図 2　アルゴリズム構成段階

1－5　アルゴリズムの構成段階

図 2 に示すように、生徒は授業において定義や歴史的アルゴリズムを学んだ後、与えられた問題を解けるようになるために、構造的アルゴリズムか記号的アルゴリズムを構成するだろう。

構造的アルゴリズムを構成した生徒は、理解を深めていくに従って、「記号的アルゴリズムのように実行できる段階」に進むのではないかと考えられる。「記号的アルゴリズムのように実行できる段階」とは、解法の概念を理解した上で、思考を伴わず、機械的に実行することができる状態である。「記号的アルゴリズムのように実行できる段階」になれば、必要な時のみ構造的アルゴリズムに引き戻し、不要な時は思考を伴わず、簡単に解法を扱うことができるようになるだろう。

対して、記号的アルゴリズムを構成した生徒は「記号的アルゴリズムのように実行できる構造的アルゴリズム」の段階へ進めることはできない。「記号的アルゴリズムのように実行できる構造的アルゴリズム」へ進めるには、まず構造的アルゴリズムへ変換することが求められるからである。

しかし、生徒自身の力で構成した記号的アルゴリズムを、生徒自身の力で構造的アルゴリズムに変換することは容易ではない。なぜなら、記号的アルゴリズムを用いていたとしても、構造的アルゴリズムを用いている生徒と同じように正しい答えを導くことができるため、生徒がその必要性を感じないからである。つまり、生徒が用いている記号的アルゴリズムを構造的アルゴリズムに変換するには、教員の支援が必要となるのである。

支援を行うためには、皆同じように正しい答えを導くことができている生徒の中から、それぞれの生徒がどのアルゴリズム構成段階にいるのか判断し、記号的アルゴリズムを用いている生徒を見つけ出さなければならない。そして、記号的アルゴリズムを構成した生徒には、構造的アルゴリズムへ転換させる支援を行うべきである。よって、本稿の目的を次のように定める。

生徒のアルゴリズム構成段階が、「記号的アルゴリズム」であるかどうかを判断できる評価方法を考察する

2章　研究の理論と方法

記号的アルゴリズムを用いている生徒に適切な支援を行うためには、記号的アルゴリズムを構成している生徒を、何らかの学習活動で見つけ出さなければならない。記号的アルゴリズムを用いる生徒を見つけ出すため、生徒が記号的アルゴリズム化する原因を考える。

2－1　生徒が記号的アルゴリズム化する原因

生徒が記号的アルゴリズムを構成する原因の一つとして、高校数学の基盤を成している代数表現が考えられる。

例えば、「$y = ax^2 + b$ 」は、変数をx , y 、定数をa , b 、x とx の積をx^2 と表現し、和を$+$ 、等しいことを$=$ でつなぐことで表現している。他にも、「$\int x\,dx$ 」、「π 」、「$\sin x$ 」等、記号を用いて表す代数表現が、高校数学の基盤を成していることは明らかである。ほとんどの生徒は、それらの記号を見ても、これは何の記号なのか疑問をもつことはない。このような記号に隠された本当の意味や概念を理解しているため疑問をもたない生徒もいれば、理解はしていないが無意識のうちに「これはこういうものだ」と納得して疑問をもたない生徒もいる。

この代数表現を用いるメリットとして、表現が楽であることが挙げられる。さらに、代数表現は、言語の異なる人々と数学についての考えを共有することを可能にする素晴らしい手段である。簡易でシンプルな代数表現への適応も、数学教育の中で求められるべき技能の１つであるとも考えられる。ユニバーサルデザインが求められている社会の中でも、多くの記号が存在しており、それらに適応することは必要な能力である。

一方で、代数表現が他の学びを阻害している現状がある。伊達（2008）も、代数表現について次のように述べている。

> 現在の高校数学においては、「代数」や「解析」の習得を急ぐ余り、記号化や公式化をその習得の「手段」と考えそれも急ぐことになってはいないだろうか。教材の本質を見失わないためにも、「記号代数」を「手段」としてだけ捉えるのではなく、「記号代数とその表現」自体を学校数学の「目的」として捉え直すことが、今、必要である (p.57)

これらのことから、代数表現が教材の本質の理解を阻害する場合もあり、問題構造を理解せずに行う記号的アルゴリズム化を促進していることもあるのではないかと考えられる。

2－2　代数表現の在り方

そこで、普段扱っている代数表現が多用された問題について、正しい答えを導くことができている生徒たちに、代数表現の在り方を見直した学習活動をさせることによって、生徒が記号的アルゴリズムを用いているのかどうかを明らかにできるのではないかと考える。

代数表現の在り方を見直した学習活動として、記号的アルゴリズムの原因となっている代数表現を可能な限り用いずに出題された問題に取り組む活動が挙げられる。例えば、「2点 $\mathrm{A}(0,2)$, $\mathrm{B}(0,-2)$ を結ぶ線分を直径とする円の方程式を求めよ」というような、ほとんどの生徒が正しい答えを求めることができる問題から代数表現を取り除き、「平面座標上の 2 点を結ぶ線分を直径とする円」等の言葉を用いた問題を作成する。この場合、座標を（x , y）と表す代数表現を取り除いている。

代数表現が取り除かれると、教材の本質や問題構造を理解せずに解いてきた生徒は、今まで解くことができていた問題にも関わらず、初見の問題のように見えてしまい、解くことができないだろう。このような、記号的アルゴリズムの原因となっている代数表現を可能な限り取り除いた問題に取り組むことで、生徒が記号的アルゴリズムを用いているのかどうかを判断できるのではないかと考える。さらに、代数表現を取り除くことで、代数表現されたものとその本来の意味を理解しているかどうかを生徒自身が自覚し、生徒自身が記号的アルゴリズムを構造的アルゴリズムへ転換する必要性を感じることが期待できる。

2－3　タイミング

代数表現を取り除いた問題を生徒に取り組ませるタイミングとして、反省的思考を行うべきだと考える。

吉井（1996）は、数学教育の問題を「問題解決

能力を高めるために、ただ多くの問題を解いていく（あるいは、解法を正確に記憶していく） ことが有効な方法ではない」（p.101）と述べ、問題を解く過程ではなく、問題を解いた後の反省的思考の必要性を示し、反省的思考により、生徒の「問題場面に依存しない抽象的・一般的知識」、つまり転移可能な知識・技能の有無を明らかにしている。よって、反省的思考により、生徒が転移不可能な記号的アルゴリズムを用いているのかどうかを判断することが期待できる。

以上のことから、本稿では、「代数表現を取り除いた問題による反省的思考」が生徒の構成したアルゴリズムの性質を明らかにすることへの有効性を考察する。「代数表現を取り除いた問題による反省的思考」とは、生徒が練習問題等を解けるようになった後に、代数表現が含まれていない問題に取り組むことで、振り返りを行うことである。

2－4　代数表現を取り除いた問題による反省的思考

2－4－1　問題形式

「代数表現を取り除いた問題による反省的思考」に適切な問題形式として、「過不足判断問題」と「構造類別問題」が挙げられる。「過不足判断問題」と「構造類別問題」は、一般に使われている言葉ではないが、本稿ではこれらを次のように定義する。

≪過不足判断問題≫
いくつかの問題を解き、それぞれが、以下のどれに該当するかを判断する問題。
・答えを導くための情報が過剰に与えられている条件過多の場合
・答えを導くために必要な情報が不足している条件不足の場合
・条件過多でも条件不足でもなく、情報量が適切な場合

≪構造類別問題≫
与えられた３つ以上の「数学的に関連がある」練習問題を、何らかの類似性を見つけて自由に分類し、そのように分類した理由を述べるオープンエンドの問題。

以上のように定義した「過不足判断問題」と「構造類別問題」は、小学校から高校まで広く活用されている出題方法である。そして、これらは代数表現を取り除いた問題による反省的思考の手段として、適当であると考えられる。

2－4－2　過不足判断問題

「過不足判断問題」は、算数や数学の文章題において、学校現場で広く用いられてきた。答えを導くための情報を発見し、整理することが難しいとされる文章題において、生徒の理解を図る学習手段として有効であるとされているからである。

特に小学校算数では、「分かっていること」と「求めたいもの」を整理することで文章題を解けるようにした後、「過不足判断問題」をいくつかの既習の問題に関連付けて解決することで、文章題の定着を図る。このように、条件の過不足がある問題の構造と、類似した既習問題を見つけ出す形で「過不足判断問題」が扱われている。

つまり、既習問題の構造を理解していなければ、既習問題の解法を「過不足判断問題」に転移させることは不可能である。よって、「過不足判断問題」を解くことができない生徒は、既習問題を記号的アルゴリズムによって解いていたと判断できるのである。

さらに、「過不足判断問題」は、代数表現を取り除いた問題を作成しやすいと考えられる。なぜなら、「過不足判断問題」に含まれる「条件過多問題」や「条件不足問題」は、文章題に取り組む際に用いられることが多いからである。文章題で取り組まれる「条件過多問題」は、小学校１年生の算数から扱われている。例えば、「花子さんはリンゴを４個、太郎さんはリンゴを２個、花子さんの弟はリンゴを１個持っています。花子さんと太郎さんは、どちらが何個多くのリンゴを持っているでしょうか」という問題に、小学校１年生は、「花子さんの弟の情報」は不要と判断しならなければならない。このように、条件に過不足がある問題は文章題で扱われることが多いことから、代数表現を取り除いた問題が作成しやすいと考えられる。簡単で明確な代数表現を取り除くと、言葉による文章題となるからである。

よって、「代数表現を取り除いた問題による反省的思考」を導くものとして「過不足判断問題」は適当であると考えられる。

2－4－3　構造類別問題

「構造類別問題」は国内外で広く研究されており、問題の類似性における生徒の着眼点について、

様々な分析がなされている。広く知られているものとして、Chartoff（1976）は、問題の解決、問題の文脈、問題の属性比較、問題の質問形式という 4 つの次元から、子どもは問題の類似性を認識することを見出したり、Silver（1979）は、数学的構造、場面、質問形式、擬構造という 4 つの次元を生徒が問題間の類似性の判断において用いることを明らかにしたりしている。他にも、多くの研究者が「構造類別問題」について考察し、様々な分析によって、生徒の思考力を可視化しようとしている。

類似性の判断の仕方を分析することについて、新里（1995）は、「問題が解けなかったとき、解けなかった問題と類似な問題から、問題を解決するために必要な情報を収集することは効果的な方法である。したがって、問題間の類似性の判断について明らかにすることは大切なことである」（p.125）と述べている。このように、生徒がどのように問題の構造を見ているのかを知ることは重要なことである。

「過不足判断問題」と同様に、「構造類別問題」でも複数の問題を比較する。「過不足判断問題」と異なる点は、「過不足判断問題」はどのような既習問題をイメージしたのかを生徒は記述しないが、「構造類別問題」では、関係性や類似性を、生徒自身の言葉で表現することである。生徒自身の言葉で表現されたものによって、生徒がどのような解法のアルゴリズムを用いているのかを判断できるだろう。

3 章　検証授業の概要

3－1　対象

進学型単位制高校である京都市立日吉ヶ丘高等学校の第 2 学年で授業を実施した。その中で、稿者が担当している 2 つの講座の生徒を対象とした。

1 つ目の講座は、計 16 名の生徒が履修している学年の中で最も習熟度の低い講座である。以下、この講座を α クラスという。

2 つ目の講座は、32 名の生徒が履修している文系選択者の中で最も習熟度の高い講座である。以下、この講座を β クラスという。

3－2　内容

表 1　単元計画（数学Ⅱ「点と直線」）

時	学習活動
1	「数直線上の2点間の距離」「線分の内分点・外分点」
2	「内分点・外分点の座標」
3	「2点間の距離」
4	「直線の方程式」
5	「直線の方程式」★
6	「2直線の平行・垂直」
7	「直線に対して対称な点」
8	「点と直線の距離」
9	「2直線の交点を通る直線」

（★：反省的思考）

3－2－1　単元計画

高校 2 年生「数学Ⅱ」の第 3 章「図形と方程式」第 1 節「点と直線」における単元計画は、表 1 の通りである。筆者は、表 1 に示した 3 時限目から 7 時限目の計 5 回の授業を 2 講座で行った。

3－2－2　反省的思考

表 1 の 4 時限目と 5 時限目の 2 回にわたって、「直線の方程式」についての授業を実施した。そして、5 時限目の授業の最後に、反省的思考を行う振り返りシートに取り組ませた。

「直線の方程式」の授業の 1 回目は、2 つの公式を扱った。1 つ目は、図 3 の、直線の傾きと直線上の 1 点の座標から直線の方程式を求める公式である。2 つ目は、図 4 の、直線上の 2 点の座標から直線の方程式を求める公式である。前者を丁寧に扱い、直線上の 2 点が明らかになれば、傾きを求めることができることから後者は前者に回帰できることを強調した。

直線の方程式 (1)

点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m の直線の方程式は

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

図 3 教科書（p.71）

直線の方程式 (2)

異なる 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は

$x_1 \neq x_2$ のとき　$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

$x_1 = x_2$ のとき　$x=x_1$

図 4 教科書（p.72）

「直線の方程式」の授業の 2 回目は、直線の方程式を求める様々な問題を扱った後、振り返りシートに取り組ませた。様々な表現が用いられている問題から、直線の情報を探し出し、探し出した条件に適切な公式を選び、それを用いて直線の方程式を求めることに慣れさせた。

その後、直線の方程式を正しく求めることができるようになった生徒たちに反省的思考を目的とした振り返りシートに取り組ませた。振り返りシートを通して、代数表現を取り除いた「過不足判断問題」と「構造類別問題」を出題した。

まず､代数表現を取り除いた｢過不足判断問題」として図 5 の問題を出題した。このような「過不足判断問題」は、直線を特定するために必要な情報を十分に理解していなければ解くことができない。生徒たちは中学数学でも「1 次関数」の単元で、直線を特定するために必要な情報を十分に学習している。中学校数学では､｢傾き」と｢切片（y 切片)」の概念を学び、与えられた情報を「$y = ax + b$」に代入する手順で直線の方程式を求めるため、中学校数学で学んだ直線の式と、高校数学で扱う直線の方程式は解法が異なるが、高校数学で初めて学ぶ概念ではないため、直線を特定するために必要な情報を十分に理解していることが期待できる。もし高校数学で、もしくは中学校数学から、直線の方程式の概念を理解せずに記号的アルゴリズムを構成していれば、図 5 の「過不足判断問題｣を的確に判断することはできないだろう。

次に、代数表現を取り除いた「構造類別問題」として図 6 の問題を出題した。「構造類別問題」は、答えのないオープンエンドの問題である。この「構造類別問題」の回答を分析することによっ

以下のような情報が与えられたとき、直線の方程式を求めることができると思いますか？
当てはまる方に〇をしてください。
できるに〇をした場合、方程式を求める際に使わない情報があれば述べてください。
できないに〇をした場合、あとどのような情報があれば求めることができるのか述べてください。

(1) ①y 切片，②傾きの値→（　できる　・　できない　）

【できると答えた人へ】使わない情報はある？

【できないと答えた人へ】必要な情報は？

(2) ①直線上の 1 点の座標 →（　できる　・　できない　）

【できると答えた人へ】使わない情報はある？

【できないと答えた人へ】必要な情報は？

(3) ①y 切片，②x 切片，③傾き（　できる　・　できない　）

【できると答えた人へ】使わない情報はある？

【できないと答えた人へ】必要な情報は？

図 5 実践した「過不足判断問題」

＊A～E のような情報が与えられ、あなたが直線の方程式を求めるとき、解法が似ていると考えるものを分類してください。いくつに分類してもかまいません。当てはまるものに ☑ をつけて、分類したものを記入してください。
例：☑ 2 つに分類　（　A　B　C　と　D　E　に分類できる）

A. 直線上の 1 点の座標と，傾きの値
B. 直線上の 2 点の座標
C. y 切片と，x 切片
D. y 切片と，傾きの値
E. x 軸との交点の座標と，傾きの値

☐ 全て似ている
☐ 2 つに分類　（＿＿＿＿＿と＿＿＿＿＿に分類できる）
☐ 3 つに分類　（＿＿＿＿と＿＿＿＿と＿＿＿＿に分類できる）
☐ 4 つに分類　（＿＿＿と＿＿＿と＿＿＿と＿＿＿に分類できる）
☐ 全て似ていない
→ そのように分類した理由を自分の言葉で説明してください。

図 6 実践した「構造類別問題」（原文ママ）

て、生徒が直線の方程式に関する問題に向かう時に何を見て解法を判断しているのかを明らかにする。もし生徒が、直線の方程式の概念を理解せずに、記号的アルゴリズムにより解法を選択していたのならば、全て違うように見えたり、類別することができなかったりするだろう。

「過不足判断問題」も「構造類別問題」も、代数表現を取り除いているため具体的に計算してから考えることはできない。つまり、「直線の方程式」の授業で生徒が培った解法手順をそのまま用いることは不可能である。今まで学んできたことを応用し、抽象的に考え、これらの問題へ転移させなければならないため、記号的アルゴリズムを用いている生徒を見つけ出すことができるだろう。

4章　考察

本研究の目的は、生徒の持つ解法のアルゴリズムに対する、代数表現を取り除いた問題による反省的思考の有効性を明らかにすることである。その方法として、「過不足判断問題」と「構造類別問題」の、2 種類の代数表現を取り除いた問題を実践した。そこから、生徒の記述を分析し、記号的アルゴリズムを構成している生徒を見つけ出す。

4－1　過不足判断問題

4－1－1　過不足判断問題（1）

表 2 に示すように、過不足判断問題（1）において、全体の 91.7 パーセントの生徒が「できる」と回答し、その中でもほとんどの生徒が使わない情報について「なし」か、未回答であった。

表 2　過不足判断問題（1）

（1）①y 切片の座標 ②傾きの値→（できる・できない）			
	αクラス（人）	βクラス（人）	全体（人）
できる	13	31	44 [91.7%]
できない	2	1	3 [6.3%]
未回答	1	0	1 [2.1%]

「なし」と記述した生徒は、y 切片の座標と傾きの値が与えられている直線の方程式を求める具体的な問題の構造的アルゴリズムを用いて答えたと考えられる。

対して、3 名の生徒が「できない」と回答し、必要な情報については、それぞれ「x 切片の座標」、「x の座標」、「直線上の 1 点の座標」と記述している。これらの生徒は、y 切片について、十分な理解ができていないと考えられる。y 切片を、直線上の 1 点のy の座標というように判断し、あと「x 切片の座標」、「x の座標」が分かっていれば解くことができる、もしくは「直線上の 1 点の座標」が必要だと思ったのではないだろうか。3 名とも、それまでに授業内で解くことができていた直線の方程式を求める問題の構造を理解せずに解いており、過不足判断問題（1）に転移されなかったのだと考えられる。

4－1－2　過不足判断問題（2）

表 3 に示すように、過不足判断問題（2）において、「できない」と回答した生徒は全体の 7 割を下回った。

表 3　過不足判断問題（2）

（2）①直線上の1点の座標 →（できる・できない）			
	αクラス（人）	βクラス（人）	全体（人）
できる	7	5	12 [25.0%]
できない	7	26	33 [68.8%]
未回答	2	1	3 [6.3%]

「できない」と回答した生徒 33 名の内、半数にあたる 17 名の生徒は、必要な情報として「直線上のもう 1 点の座標か､傾きの値」と記述しており、構造的アルゴリズムを構成していると考えられる。

対して、「できる」と回答した生徒 12 名の内、10 名が使わない情報が未回答であった。残り 2 名の生徒は「なし」と記述している。これらの生徒は、平面座標上で求める直線をイメージできておらず、記号的アルゴリズムを用いて直線を求める問題を解いていたのではないだろうか。ある 1 点を通る直線は、その 1 点を中心に回転するようにして無数にある。また、傾きの値だけが与えられた場合、傾きが等しい平行な直線が無数にイメージできる。その中から、直線上のもう 1 点を明らかにすることで、直線を特定するといったイメージがもてていないのではないかと考えられる。そのため、直線の方程式を求めるための記号的アルゴリズムを構成してしまったのである。

4－1－3　過不足判断問題（3）

表 4 に示すように、過不足判断問題（3）におい

て、ほとんどの生徒が「できる」と回答した。しかし、使わない情報として記述した内容は様々であった。

表４　過不足判断問題（3）

（3）①ｙ切片の座標 ②ｘ切片の座標 ③傾き（できる・できない）			
	αクラス（人）	βクラス（人）	全体（人）
できる	13	31	44 [91.7%]
できない	0	1	1 [2.1%]
未回答	3	0	3 [6.3%]

使わない情報について、「どれか１つは使わない」、「どれか２つを使えば求めることができる」、「①か②か③」等記述した生徒は５名であった。これらの生徒は、平面座標や直線の概念を十分に理解し、複数の構造的アルゴリズムを構成していると判断できる。

情報を１つ選択し使わないと記述した生徒は14名、情報を２つ選択しどちらかは使わずに解くことができると記述した生徒は７名であった。先に述べた「どれか１つは使わない」ことを理解したうえで、１つ、もしくは２つの情報を選択した場合も考えられるが、そうでないならば、平面座標上の直線の方程式を求めるいくつかの問題の解法のアルゴリズムをそれぞれ独立して理解しているのではないかと考えられる。平面座標上の直線の方程式を求めるそれぞれのアルゴリズムを構造的に考えることができないのではないかと考えられる。よって、これらの生徒は、記号的アルゴリズムを用いて直線の方程式を求める問題を解いていたのではないかと考えられる。

4－1－4　過不足判断問題の有効性

過不足判断問題（1）（2）（3）を通して、直線の方程式を求めることが「できる」のか「できない」のかを、全て適切に判断できた生徒は、αクラスは16名中６名、βクラスは32名中24名であった。これらの生徒は、今まで解いてきた直線の方程式を求める問題から、２つの情報から直線の方程式を求めているという直線の方程式の概念を理解していたのではないかと考える。つまり、構造的アルゴリズムを構成していると考えられる。

4－2　構造類別問題

表５に示すように、構造類別問題において、分類の仕方は様々であった。その他、未回答であった生徒が６名、複数回答した生徒が２名いた。

生徒によって様々な分類をしているが、その中でも、全体の23パーセントに当たる11名が「ADE」と「BC」の２つに分類していた。分類した理由について、「傾きの有無」と記述した生徒が多かった。「計算量の違い」と記述した生徒もいたが、傾きを求める必要があるかどうかによって計算量が変わることから、「傾きの有無」と同じように考えたと思われる。他の理由も同様に、表現の仕方は違うものの、「傾きの有無」と同じ考えだと思われる理由を記述していた。

表５　構造類別問題の結果

分類1	分類2	分類3	分類4	分類5	人数	理由
ABCDE					2	・座標平面を頭に思い描いてそこから当てはまるものを探すから
AB	CDE				1	・ABはもともと点が分かっている状態だけど、CDEは自分で点を求めてから解くことが多いから
AD	BCE				1	
AE	BCD				1	
ACD	BE				1	
ADE	BC				11	・傾きの有無（4名）・計算力の違い・使う公式が違う ・座標と傾きか、座標2つ・Cも直線上の2点だからBと同じ
ABE	CD				1	・グラフか公式
ABCE	D				1	・Dは式がなくてもいい
AB	CD	E			1	・直線上にある1,2点の座標は1つが0の可能性もあるが、他の整数もある（AB）、切片はXYのどちらかに0が入る（CD）、Eは軸関係
AD	BC	E			1	
AD	B	CE			1	
AE	BC	D			1	・AEは1つの点と傾き、BCは2点、Dはすぐわかる
A	B	C	D	E	1	・それぞれ求め方が違うから

このように、「ADE」と「BC」の２つに分類した 11 名の生徒は、過不足判断問題（1）（2）（3）を、全て適切に判断している。さらに、全て適切に判断しただけでなく、必要・不必要な問題についても未回答ではなく、生徒自身の言葉で考えを記述していた。このことから、「ADE」と「BC」の２つに分類した 11 名の生徒は、前章の図１と図２の２つの公式を基に、構造的アルゴリズムを構成していると考えられる。

また、「ADE」と「BC」の２つに分類した生徒たちと、似ているのが「AE」と「BC」と「D」の３つに分類した１名の生徒である。この生徒は、「ADE」と「BC」の２つに分類した生徒たちと同様の考え方をした後、さらにその中から、「D」は中学校数学から見慣れている「$y = ax + b$」に値を代入するだけで、計算をせずに直線の方程式が求められることに気付き、3 つに分類している。この生徒は、過不足判断問題（1）（2）（3）を適切に判断しただけでなく、必要・不必要な情報の記述内容も、様々な問題と関連付けた多面的な考え方ができていた。このことから、中学校数学での学びや、平面座標上の直線の方程式の概念を十分に理解していると考えられる。

表 5 に示しているように、多くの生徒が類別した理由を記述しなかった。直感で分類したのか、考えを言語化することが難しかったのか、時間が足りなかったのかは判断できないが、今までは直線の方程式を難なく解くことができていたため、その解法のアルゴリズムに何らかの課題があると考えられる。なぜ無回答であったのかを調べるため、無回答の生徒の内の１人にインタビューを行った。

4−3　インタビュー

4−3−1　インタビュー対象者

a さんにインタビューを行った。a さんは、α クラスの生徒である。過不足判断問題は適切に判断できておらず、必要・不必要な情報について記述する欄には「？」と記述している。

以上のような特徴をもつ a さんにインタビューを行った。

4−3−2　インタビュー結果

a さんにインタビューを行った結果、表 6 のように考え、過不足判断問題と構造類別問題に回答していたことが分かった。

表６　a さんへのインタビュー

	a さんの回答	a さんへのインタビュー結果
過不足問題（1）	できる 必要・不必要な情報・・・「？」	できるって分かって、使わない情報っていうのが理解できなかったんで、？ってしといた。
過不足問題（2）	できる 必要・不必要な情報・・・「？」	何か先生ゆってたんかなって思って、できるに丸しといて、使わない情報っていうのが理解できなかったんで、？ってしといた。「直線上の1点の座標」っていうのが x だけの1点なんか、y だけの1点なんか、xy の1点なんか、どっちか分からんかった。
過不足問題（3）	できる 必要・不必要な情報・・・「？」	できるって分かって、使わない情報っていうのが理解できなかったんで、？ってしといた。
構造類別問題	無回答 その理由・・・「無記述」	理解できなかったです。直線上やから、この、こっち（x 軸を指さして）かもしれないし、こっち（y 軸を指さして）かもしれない。

a さんは、「座標」、「求める直線」、「x 軸」、「y 軸」等の言葉を十分に理解していないと思われる。しかし、筆者が「直線上の１点」が何を指しているのかを座標平面を用いて説明すると、「(直線の方程式をもとめることは) 無理ですね。だって傾きとか分からないから」と答えた。a さんは、座標平面上で「座標」、「求める直線」、「x 軸」、「y 軸」等の言葉を指し示しながら説明すれば理解することができるのにも関わらず、代数表現が多用された既習の直線の方程式を求める問題は、問題構造を十分に理解せずに解いていたと考えられる。つまり、代数表現が多用された問題を解くことができる生徒が、問題構造を十分に理解して解いているのかを明らかにするという点で、代数表現を取り除いた「過不足判断問題」と「構造類別問題」による反省的思考は有効であったと考えられる。

5 章　成果と課題

5−1　成果

本稿の成果として２点挙げられる。

１つ目は、数学における生徒の望ましい姿と望ましくない姿を構造化したことである。生徒が問題に取り組む際の考え方に焦点を当て、特定の解法の手順を覚えていることを問題視した。そこで、生徒がアルゴリズムを構成することによって問題の解法を考えていると仮定し、そのアルゴリズムを「歴史的アルゴリズム」と「記号的アルゴリズム」と「構造的アルゴリズム」に分類した。さらに、3 つのアルゴリズムを基に生徒のアルゴリズム構成段階を構造化したことは、改善の余地はあ

るもの、本稿の成果である。

2 つ目は、生徒の構成したアルゴリズムの性質を明らかにする方法として、「代数表現を取り除いた問題による反省的思考」を考えたことである。検証した結果、一見皆同じように正しい答えを導いている生徒たちであるが、その中から十分に内容を理解せずに答えを導いている生徒を見つける手段として、「過不足判断問題」と「構造類別問題」による「代数表現を取り除いた問題による反省的思考」は有効であったと言える。さらにこの方法は、記号的アルゴリズムによって正しい答えを導いてきた生徒たちに、概念の理解が伴っていないことを自覚させることにも有効であった。

5－2　今後の課題

今後の課題として、記号的アルゴリズムを構成している生徒が構造的アルゴリズムを構成するための支援が挙げられる。今年度は、新型コロナウイルスの影響で対話を用いることができず、「代数表現を取り除いた問題による反省的思考」はワークシートのみでの実践となった。しかし、その取り組みの中に対話を用いることで、生徒のアルゴリズム段階を次へ進めることができるのではないかという仮説を立てている。顔を合わせる対話だけでなく、ワークシートによる交流等、今年度のような状況の中でも、生徒同士で学び合うことができる可能性について探究していきたい。

【注】

1. 岡本（2001）は、「従来の一般的な心理学的定義によれば、転移（transfer）とは、『先行の学習が後続の学習に影響を及ぼすこと』とされている。例えば、英語を既に学習しているとドイツ語の学習が容易になる（正の転移：positive transfer)、あるいは、中学時代に軟式テニスをしていたために、高校で硬式テニスを獲得するのが困難であった（負の転移：negative transfer）などは、いずれも転移と呼ばれる現象である」（p.2）と述べている。

【引用文献】

新里孝雄（1995)「図形の証明問題の類似性に関する考察」,『数学教育学研究：全国数学教育学会誌 第１巻』, pp.125-131

岡部恒治ら（2016)『改訂版 高等学校 数学Ⅱ』数研出版株式会社

岡本真彦（2001)「熟達化とメタ認知―認知発達的観点から―」,『日本ファジィ学会誌 Vol.13』, pp.2-10

岡本真彦・加藤久恵・西森章子・三宮真智子（2003)「数学的思考と論理的思考をつなぐための認知心理学的アプローチ」,『日本科学教育学会 年会論文集 27』, pp.107-110

伊達文治（2008)「数学教育における文化的価値に関する研究―高校数学の基盤をなす代数表現とその文化性―」,『全国数学教育学会誌 数学教育学研究 第 14 巻』pp.51-58

遠山啓・銀林洪（1992)『新版 水道方式入門 整数編』国土社

日本数学教育学会（2018)『算数教育指導用語辞典［第 5 版]』教育出版

藤村宣之・橘春菜（2018)『協同的探究学習で育む「わかる学力」―豊かな学びと育ちを支えるために―』ミネルヴァ書房

眞渕綾希・秋田美代（2013)「数学の活用力を高める指導についての研究―関係の表象を中心として―」,『数学教育学会誌 2013 Vol.54』, pp.117-126

吉井寛晃（1996)「数学学習における反省的思考に関する考察―問題解決スキーマの構成を促進する対応付けについて―」,『全国数学教育学会誌 数学教育学研究 第 2 巻』pp.101-107

Chartoff，Ｂ．Ｔ．（1976）「An exploratory investigation utilizing a multidimensional scaling procedure to discover classification criteria for algebra word problems used by students」，『Doctoral dissertation，Northwestern university』

Silver，E. A.（1979)「Students perceptions of relatedness among mathematical word problems．」，『Journal for Research in Mathematics Education 10』pp.195-210.

Silver,E.A.（1981）「Recall of mathematical information：Solving related problems.」，『Journal of Experimental Psychology』pp.54-64.